अध्यायः 14

गुणनखण्डनम्

14.1 भूमिका

14.1.1. प्राकृतसंख्यानां गुणनखण्डः

भवतां संज्ञाने भविष्यति यत् भवन्तः गुणनखण्डानां विषये VI कक्ष्यायां पठितवन्तः। आगच्छन्तु एकां प्राकृत-संख्यां स्वीकुर्मः। स्वीकुर्वन्तु यत् एषा संख्या 30 अस्ति। वयम् एतां संख्यां प्राकृत-संख्यानां गुणनफलरूपे लिखामः यथा

$$30 = 2 \times 15$$
$$= 3 \times 10 = 5 \times 6$$

एवं रीत्या 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 तथा 30 संख्या 30 इत्यस्याः गुणनखण्डाः सन्ति। एतासु 2, 3 तथा 5 संख्या 30 इत्यस्याः अभाज्य-गुणनखण्डः स्यात् (कथम् ?)। यदा का अपि संख्या अभाज्य-गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे लिखिता स्यात् तदा सा तस्याः अभाज्यगुणनखण्डरूपे भवति। उदाहरणार्थं 30 इति वयम् अभाज्य-गुणनखण्डरूपे $2 \times 3 \times 5$ इति लिखामः। 70 इत्यस्य अभाज्य-गुणनखण्डरूपं $2 \times 5 \times 7$ इति लिखामः। 90 इत्यस्याः अभाज्य-गुणनखण्डरूपं $2 \times 3 \times 3 \times 5$ इत्यादिः।

> वयं जानीमः यत् 30 इति अस्मिन् रूपे अपि लेखितुं शक्यते $30 = 1 \times 30$ एवमेव 1 तथा 30 अपि 30 इत्यस्य गुणनखण्डः अस्ति। भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् 1 इति प्रत्येकं संख्यायाः एकः गुणनखण्डः भवति उदाहरणार्थम् $101 = 1 \times 101$ भवति परन्तु यदा कदा अपि अपि वयं काम् अपि संख्यां गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे लेखिष्यामः तदा वयं 1 इति गुणनखण्डरूपे तावत् पर्यन्तं न लेखिष्यामः। यावत् विशेषरूपेण आवश्यकं न भवेत्।

एवमेव वयं बीजीय-व्यञ्जकान् अपि तस्य गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे व्यक्तुं शक्नुमः। अस्य अध्ययनं वयम् अस्मिन् अध्याये कुर्मः।

14.1.2 बीजीय-व्यञ्जकानां गुणनखण्डः

वयं VII कक्ष्यायां दृष्टवन्तः यत् बीजीय-व्यञ्जकानां पदं गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे भवन्ति। उदाहरणार्थं बीजीय-व्यञ्जकः $5xy+3y$ इत्यस्मिन् $5xy$ इति पदं 5 इति गुणनखण्डैः x तथा y इति योगः अस्ति। अर्थात्

$$5xy=5\times x \times y$$

ध्यानं ददतु यत् $5xy$ इत्यस्य गुणनखण्डः 5, x तथाy इत्यनयोः इतः गुणनखण्डं कर्तुं न शक्यते। अर्थात् तेषां गुणनखण्डानां

> ध्यानं ददतु यत् 1 पदं $5xy$ इत्यस्य एकः गुणनखण्डः अस्ति। यतो हि
>
> $$5xy=1\times5\times x\times y$$
>
> वस्तुतः 1 इति प्रत्येकं पदस्य एकः गुणनखण्डः भवति। प्राकृत-संख्यानां स्थितेः सदृशं यावत् पर्यन्तं विशेषरूपेण आवश्यकं न स्यात् वयं 1 इति कस्य अपि पदस्य पृथक्तया गुणनखण्डं लेखितुं न शक्नुमः।

गुणनफलरूपे व्यक्तीकर्तुं न शक्यते। वयं कथयितुं शक्नुमः यत् $5xy$ इत्यस्य अभाज्य-गुणनखण्डः $5, x$ तथा y अस्ति। बीजीय-व्यञ्जकेषु वयम् ‘ अभाज्य ’ इत्यस्य स्थाने ‘अखण्डनीयः’ इति शब्दस्य प्रयोगं कुर्मः । वयं कथयामः यत् $5xy$ इत्यस्य अखण्डनीयं रूपं $5\times x\times y$ अस्ति। ध्यानं ददतु यत् $5\times(xy)$, $5xy$ इति पदस्य अखण्डनीयं रूपं नास्ति यतो हि गुणनखण्डः xy इति अग्रे x एवं y इत्यस्य गुणनफलरूपे व्यक्तीकर्तुं शक्यते अर्थात् $xy=x\times y$ इति अस्ति।

साम्प्रतं व्यञ्जकः $3x(x+2)$ इत्यस्मिन् विचारं कुर्वन्तु। एतं गुणनखण्डानां $3, x$ तथा $(x+2)$ इत्यस्य गुणनफलरूपे व्यक्तुं शक्यते। अर्थात्

$$3x(x+2)=3\times x\times(x+2)$$

व्यञ्जकः $3x(x+2)$ इत्यस्य अखण्डनीयः गुणनखण्डः $3x$ तथा $(x+2)$ अस्ति।

एवमेव व्यञ्जकः $10x\ (x+2)(y+3)$ इति अखण्डनीयरूपे एवं रीत्या व्यकत्तीकर्तुं शक्यते।

$$10x\ (x+2)(y+3)=2\times5\times x\times\ (x+2)\times(y+3)$$

14.2 गुणनखण्डनं किम् अस्ति ?

यदा वयं कस्य अपि बीजीय-व्यञ्जकस्य गुणनखण्डनं कुर्मः तदा वयं तं गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे लिखामः। एते गुणनखण्डाः, संख्याः, बीजीयचराः तथा बीजीय-व्यञ्जकाः भवितुम् अर्हन्ति । $3xy$, $5x^2y$, $2x(y+2)$, $5(y+1)(x+2)$ सदृशः व्यञ्जकः पूर्वतः एव गुणनखण्डरूपे सन्ति। यथा वयं पूर्वतः एव जानीमः वयम् उपरोक्त-व्यञ्जकानां गुणनखण्डान् एतत् दृष्ट्वैव पठितुं शक्नुमः। एतत् विपरीतं $2x+4, 3x+3y, x^2+5x$, x^2+5x+6 एतादृक् व्यञ्जकेषु अपि विचारं कुर्वन्तु। एतत् स्पष्टं नास्ति यत् एतेषां गुणनखण्डाः के सन्ति। एतादृशानां व्यञ्जकानां गुणनखण्डं कर्तुम् क्रमबद्धविधीनां विकासः करणीयः। एतत् एव इदानीं वयं कुर्मः।

14.2.1 सार्व-गुणनखण्डानां विधिः

- वयम् एकेन सरल-उदाहरणेन आरभामः $2x+4$ इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु।
  वयम् एतस्य प्रत्येकं पदम् अखण्डनीय-गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे लेखिष्यामः।

$$2x=2\times x$$

$$4=2\times2$$

$$\text{अतः } 2x+4=(2\times x)+(2\times2)$$

ध्यानं ददतु यत् गुणनखण्डः 2 उभयोः पदयोः उभयनिष्ठं (सार्व इति) अस्ति।

पश्यन्तु वितरण-नियमेन $2\times(x+2)=(2\times x)+(2\times2)$

अतः वयं लेखितुं शक्नुमः यत्

$$2x+4=2\times(x+2)=2(x+2)$$

एवं रीत्या व्यञ्जकः $2x+4$ तदेव अस्ति यत् $2(x+2)$ अस्ति। अधुना वयम् अस्य गुणनखण्डं पठितुं शक्नुमः। एते 2 तथा $(x+2)$ स्तः। एते गुणनखण्डाः अखण्डनीयाः सन्ति।

इदानीम् $5xy+10x$ इति गुणनखण्डं कुर्वन्तु।

$5xy$ तथा $10x$ इत्यस्य अखण्डनीय-गुणनखण्डरूपं क्रमशः अस्ति।

$$5xy=5\times x\times y$$

$$10x=2\times5\times x$$

ध्यानं ददतु यत् उभयोः पदयोः 5 तथा x उभयनिष्ठ-गुणनखण्डः अस्ति। साम्प्रतम् ,

$$5xy+10x=(5\times x\times y)+(5\times x\times2)$$

$$(5x\times y)+(5x\times2)$$

वयम् उभे पदे वितरण-नियमेन संयोजयामः।

$$(5x\times y)+(5x\times 2)=5x\times(y+2)$$

अतः $5xy+10x=5\ x\ (y+2)$(एतत् एव वाञ्छित-गुणनखण्डरूपे अस्ति।)

उदाहरणम् 1 $12a^2\ b+15ab^2$ इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु।

समाधानम् वयं प्राप्नुमः यत् $12a^2\ b=2\times2\times3\times a\times a\times b$

$15ab^2=3\times5\times a\times b\times b$

एतयोः उभयोः पदयोः 3, a तथा b सार्व-गुणनखण्डः अस्ति।

अतः $12a^2\ b+15ab^2 = (3\times a\times b\times2\times2\times a)+(3\times a\times b\times5\times b)$

$= 3\times a\times b\times[(2\times2\times a)+(5\times b)]$

$= 3ab\times(4a+5b)$ (पदानां योगानन्तरम्)

$= 3ab(4a+5b)$ (वाञ्छित-गुणनखण्डरूपम्)

उदाहरणम् 2 $10x^2-18x^3+14x^4$ इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु।

समाधानम् $10x^2=2\times5\times x\times x$

$18x^3=2\times3\times3\times x\times x\times x$

$14x^4=2\times7\times x\times x\times x\times x$

एतेषु त्रयेषु अपि पदेषु सार्व-गुणनखण्डः 2, x तथा x सन्ति।

अतः $10x^2-18x^3+14x^4=(2\times x\times x\times5)-(2\times x\times x\times3\times3\times x)$

$+ (2\times x\times x\times7\times x\times x)$

$= 2\times x\times x\times[(5-(3\times3\times x)+(7\times x\times x)]$

$= 2x^2\times(5-9x+7x^2)=\underbrace{2x^2\times(7x^2-9x+5)}$ (त्रयाणां पदानां योजने सति)

किं भवन्तः पश्यन्ति यत् एकस्य व्यञ्जकस्य गुणनखण्डरूपे केवलम् एकमेव पदं भवति ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

गुणनखण्डं कुर्वन्तु

(i) $12x+36$ (ii) $22y-33z$ (iii) $14pq+35pqr$

14.2.2 पदानां पुनः समूहनद्वारा गुणनखण्डनम्

$2xy+2y+3x+3$एतेषु व्यञ्जकेषु विचारं कुर्वन्तु। भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् पूर्वयोः द्वयोः पदयोः सार्वगुणनखण्डः 2 तथा y अस्ति एवम् अन्तिमयोः द्वयोः पदयोः सार्वगुणनखण्डः 3 अस्ति परन्तु सर्वेषु पदेषु कश्चित् सार्वगुणनखण्डः नास्ति। वयं केन प्रकारेण आरम्भं कुर्मः ?

आगच्छन्तु $(2xy+2y)$ इति गुणनखण्डरूपे लिखामः।

$2xy+2y=(2\times x\times y)+(2\times y)$

$= (2\times y\times x)+(2\times y\times1)$

$= (2y\times x)+(2y\times1)=2y(x+1)$

एवमेव $3x+3=(3\times x)+(3\times1)$

$=3\times(x+1)=3\ (x+1)$

ध्यानं ददतु - अत्र अस्माभिः 1 इति गुणनखण्डरूपे प्रदर्शनस्य आवश्यकता अस्ति। कथम् ?

अतः $$2xy+2y+3x+3=2y(x+1)+3\ (x+1)$$

ध्यानं ददतु यत् अत्र दक्षपक्षस्य उभयोःपक्षयोः एकः सार्व-गुणनखण्डः $(x+1)$ अस्ति। उभयोः पदयोः मेलने सति,

$2xy+2y+3x+3=2y(x+1)+3(x+1)=(x+1)(2y+3)$

साम्प्रतं $2xy+2y+3x+3$ इति व्यञ्जकः गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे अस्ति। अस्य गुणनखण्डः $(x+1)$ $(2y+3)$ अस्ति। ध्यानं ददतु यत् एते गुणनखण्डाः अखण्डनीयाः सन्ति।

पुनः समूहनं किम् अस्ति ?

स्वीकुर्वन्तु यत् उपरोक्त-व्यञ्जकः $2xy+3+2y+3x$ रूपे प्रदत्तः अस्ति।तदा अस्य गुणनखण्डं द्रष्टुं सरलं नास्ति। एतम् एव व्यञ्जकं $2xy+2y+3x+3$ इति रूपे पुनर्व्यवस्थिते सति अस्य $(2xy+2y)$ तथा $(3x+3)$ समूहं निर्माय गुणनखण्डनं कर्तुं शक्यते एतत् एव पुनः समूहनम् अस्ति।

पुनः समूहनम् एकाद् अधिकविधिद्वारा सम्भवम् अस्ति । स्वीकुर्वन्तु यत् वयम् उपर्युक्त-व्यञ्जकं $2xy+3x+2y+3$ इति रूपे पुनः समूहनं कुर्मः । एतस्मात् अपि वयं गुणनखण्डं प्राप्तुं शक्नुमः । आगच्छन्तु , प्रयासं कुर्मः

$$2xy+3x+2y+3=2\times x\times y+3\times x+2y+3$$
$$= x\times(2y+3)+1\times(2y+3)$$
$$= (2y+3)(x+1)$$

गुणनखण्डाः समानाः सन्ति (यथा ते भवितव्याः) यद्यपि ते विभिन्न-क्रमे दृश्यन्ते।

उदाहरणम् 3 $6xy - 4y + 6 - 9x$ इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु।

समाधानम्

1 चरणम् परीक्षणं कुर्वन्तु किं सर्वेषु पदेषु कश्चित् सार्व-गुणनखण्डः अस्ति वा इति। अत्र कश्चित् अपि नास्ति।

2 चरणम् समूहनं विषये विचारयन्तु। ध्यानं ददतु यत् पूर्वयोः द्वयोः पदयोः सार्व-गुणनखण्डः $2y$ अस्ति। अतः

$$6xy-4y=2y(3x-2) \qquad (a)$$

अन्तिमयोः द्वयोः पदयोः विषये किं कथयितुं शक्यते ? तानि पदानि पश्यन्तु यदि भवन्तः अस्य क्रमः परिवर्त्य $-9x+6$, इति लिखन्तु तर्हि गुणनखण्डः $(3x-2)$ आगमिष्यति।

$$\text{अतः}\ -9x+6=-3(3x)+3(2)$$
$$=-3(3x-2) \qquad (b)$$

3 चरणम् (a) तथा(b) इति सहैव स्थापने सति

$$6xy-4y+6-9x=6xy-4y-9x+6$$
$$= 2y(3x-2)-3(3x-2)$$
$$= (3x-2)(2y-3)$$

एवमेव $(6xy-4y+6-9x)$ इत्यस्य गुणनखण्डः $(3x-2)$ तथा $(2y-3)$ अस्ति।

प्रश्नावली 14.1

1. प्रदत्त-पदेषु सार्व-गुणनखण्डं जानन्तु ।

   (i) $12x, 36$ (ii) $2y, 22xy$ (iii) $14pq, 28p^2 q^2$

   (iv) $2x, 3x^2, 4$ (v) $6abc, 24ab^2, 12a^2 b$

   (iv) $16x^3, -4x^2, 32x$ (vii) $10pq, 20qr, 30rp$

   (viii) $3x^2 y^3, 10x^3 y^2, 6x^2 y^2 z$

2. निम्नलिखित-व्यञ्जकानां गुणनखण्डनं कुर्वन्तु

   (i) $7x-42$ (ii) $6p-12q$ (iii) $7a^2+14a$

   (iv) $-16z+20z^3$ (v) $20l^2 m+30alm$

   (vi) $5x^2 y-15xy^2$ (vii) $10a^2-15b^2+20c^2$

   (viii) $-4a^2+4ab-4ca$ (ix) $x^2 yz+xy^2 z+xyz^2$

   (x) $ax^2 y+bxy^2+cxyz$ (त्रयाणां पदानां मेलने सति)

3. गुणनखण्डनं कुर्वन्तु -

   (i) $x^2+xy+8x+8y$ (ii) $15xy-6x+5y-2$

   (iii) $ax+bx-ay-by$ (iv) $15pq+15+9q+25p$

   (v) $z-7+7xy-xyz$

14.2.3 सर्वसमिकानां प्रयोगद्वारा गुणनखण्डनम्

वयं जानीमः यत्

$$(a+b)^2= a^2+2ab+b^2 \qquad \text{(I)}$$

$$(a-b)^2= a^2-2ab+b^2 \qquad \text{(II)}$$

$$(a+b)\,(a+b) = a^2-b^2 \qquad \text{(III)}$$

निम्नलिखित-समाधितात् उदाहरणात् एतत् स्पष्टं भविष्यति यत् गुणनखण्डनाय एतासां सर्वसमिकानां प्रयोगः कथं भवति । सर्वप्रथमं वयं प्रदत्तान् व्यञ्जकान् पश्यामः यदि एतत् उपर्युक्त-सर्वसमिकासु कस्य अपि एकस्य दक्षपक्षरूपस्य अस्ति तर्हि तस्याः सर्वसमिकायाः वामपक्षस्य सङ्गत-व्यञ्जकात् वाञ्छित-गुणनखण्डं प्राप्तुं शक्यते ।

उदाहरणम् 4 $x^2+8x+16$ इत्यस्य गुणनखण्डं कुर्वन्तु ।

समाधानम् एतं व्यञ्जकं पश्यन्तु । अस्य त्रीणि पदानि सन्ति । अतः अस्मिन् III सङ्ख्यकस्य सर्वसमिकस्य प्रयोगः भवितुं नार्हति । सहैव अस्य प्रथमम् अथ तृतीयं पदं पूर्णवर्गः अस्ति तथा मध्यस्थ पदस्य चिह्नं धनात्मकम् अस्ति । अतः एतत् $a^2+2ab+b^2$ इत्यस्य रूपस्य अस्ति,

यत्र $a=x$ तथा $b=4$ अस्ति ।

एवमेव $a^2+2ab+b^2 = x^2+2(x)(4)+4^2$

$= x^2+8x+16$

यतो हि $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$,

तोलनायां सत्यां $x^2+8x+16 = (x+4)^2$ (वाञ्छित-गुणनखण्डनम्)

उदाहरणम् 5 $4y^2-12y+9$ इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु ।

समाधानम् ध्यानं ददतु यत् $4y^2=(2y)^2, 9=3^2$ तथा $12y=2\times3\times(2y)$

अतः $4y^2-12y+9=(2y)^2-2\times3\times(2y)+(3)^2$

$= (2y-3)^2$ (वाञ्छित-गुणनखण्डनम्)

ध्यानं ददतु यत् प्रदत्त-व्यञ्जकः $a^2-2ab+b^2$ इति रूपस्य अस्ति , यत्र $a=2y, b=3$ तथा $2ab=2\times2y\times3=12y$ अस्ति ।

उदाहरणम् 6 $49p^2-36$ इत्यस्य गुणनखण्डं कुर्वन्तु।

समाधानम् अत्र द्वे पदे स्तः। उभौ अपि पूर्ण-वर्गौ स्तः तथा द्वितीयः ऋणात्मकः अस्ति अर्थात् एतत् (a^2-b^2) व्यञ्जकरूपेण अस्ति। अत्र III सर्वसमिकायाः प्रयोगः भविष्यति।

$$49p^2-36=(7p)^2-(6)^2$$

$$=(7p-6)(7p+6)\text{(वाञ्छित-गुणनखण्डनम्)}$$

उदाहरणम् 7 $a^2-2ab+b^2-c^2$ इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु।

समाधानम् प्रदत्त-व्यञ्जकस्य पूर्वं त्रिभ्यः पदेभ्यः $(a-b)^2$ प्राप्यते।चतुर्थपदम् एकः वर्गः अस्ति। अत एव एतं व्यञ्जकं वर्गद्वयस्य अन्तररूपे परिवर्तितुं शक्यते।

इत्थं रीत्या $a^2-2ab+b^2-c^2=(a-b)^2-c^2$ (सर्वसमिका II इत्यनेन)

$$=[(a-b)-c)((a-b)+c)] \quad \text{(सर्वसमिका III इत्यनेन)}$$

$$=(a-b-c)(a-b+c) \quad \text{(वाञ्छित-गुणनखण्डनम्)}$$

ध्यानं ददतु यत् वाञ्छित-गुणनखण्डनं प्राप्तुं वयं कथं क्रमेण सर्वसमिकाद्वयस्य प्रयोगं कृतवन्तः।

उदाहरणम् 8 m^4-256 इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु।

समाधानम् वयं पश्यामः यत् $m^4=(m^2)^2$ तथा $256=(16)^2$

अतः प्रदत्त-व्यञ्जकेषु सर्वसमिका III इत्यस्य प्रयोगः भविष्यति।

अत एव $m^4-256=(m^2)^2-(16)^2$

$$=(m^2-16)=(m^2+16) \text{ [सर्वसमिका (III) इत्यनेन]}$$

साम्प्रतं m^2+16 इति परं गुणनखण्डः भवितुं नार्हति परन्तु (m^2-16) इत्यस्य सर्वसमिका III इत्यस्य प्रयोगात् इतोऽपि गुणनखण्डः भवितुम् अर्हति।

साम्प्रतं $m^2-16=m^2-4^2$

$$=(m-4)(m+4)$$

अत एव $m^4-256=(m-4)(m+4)(m^2+16)$

14.2.4 (x+a)(x+b) इत्यस्य रूपस्य गुणनखण्डः

आगच्छन्तु साम्प्रतं वयं चर्चां कुर्मः यत् एकचरीय-व्यञ्जकानां यथा $x^2+5x+6, y^2-7y+12, z^2-4z-12$, $3m^2+9m+6$, इत्यादीनां गुणनखण्डनं कथं कर्तुं शक्नुमः। ध्यानं ददतु यत् एषः व्यञ्जकः $(a+b)^2$ अथवा $(a-b)^2$ इति प्रकारस्य नास्ति अर्थात् एषः पूर्णवर्गः नास्ति। उदाहरणार्थं x^2+5x+6 इत्यस्मिन् 6 पदं एकः पूर्णवर्गः नास्ति। स्पष्टतः एतादृशाः व्यञ्जकाः (a^2-b^2) इति प्रकारकाः अपि न सन्ति।

परन्तु एते व्यञ्जकाः $x^2+(a+b)x+ab$ इति प्रकारकः प्रतीयते अत एव एतादृशं गुणनखण्डनं कर्तुं वयं गत-अध्याये कृत-अध्ययनस्य चतुर्थ्याः सर्वसमिकायाः प्रयोगं कर्तुं शक्नुमः। एषा सर्वसमिका अस्ति -

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)\ x+ab \qquad \text{(IV)}$$

एतदर्थम् अस्माभिः x इत्यस्य गुणाङ्कः अचरपदञ्च द्रष्टव्यम्। आगच्छन्तु, निम्नलिखित-उदाहरणे पश्यामः यत् एतत् केन प्रकारेण भवति।

उदाहरणम् 9 x^2+5x+6 इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु।

समाधानम् यदि वयं सर्वसमिका (IV) इत्यस्य दक्षपक्षात् x^2+5x+6 इत्यस्य तोलनं कुर्मः तदा वयं प्राप्नुमः यत् $ab=6$ तथा $a+b=5$ अस्ति। इतः अस्माभिः a तथा b इति ज्ञातव्यं तदा $(x+a)$ तथा $(x+b)$ इति गुणनखण्डौ भविष्यतः।

यदि $ab=6$ अस्ति तर्हि अस्य अर्थः अस्ति यत् a तथा b, 6 संख्यायाः गुणनखण्डः अस्ति।

आगच्छन्तु $ab=6$ तथा $b=1$ इति स्वीकृत्य प्रयासं कुर्मः। एतेषां मानानां कृते $a+b=7$ अस्ति तथा 5 नास्ति। अत एव एषः विकल्पः समीचीनः नास्ति।

आगच्छन्तु $a=2$ तथा $b=3$ इति स्वीकृत्य प्रयासं कुर्मः। एतदर्थं $a+b=5$ अस्ति, समीचीनं तदेव अस्ति यत् वयम् इच्छामः।

तदा, अस्य प्रदत्त-व्यञ्जकस्य गुणनखण्डरूपं $(x+ 2)$ तथा $(x+3)$ अस्ति।

व्यापकरूपे x^2+px+q इति प्रकारस्य बीजीय-व्यञ्जकस्य गुणनखण्डं कर्तुं वयं q इत्यस्य (अर्थात् अचर-पदस्य) गुणनखण्डद्वयं a तथा b एवं रीत्या जानीमः यत् -

$ab=q$ तथा $a+b=p$ भवेत्।

तदा एषः व्यञ्जकः भवति	$x^2+(a+b)\ x+ab$
अथवा	$x^2+ax+bx+ab$
अथवा	$x(x+a)+b(x+a)$
अथवा	$(x+a)\ (x+b)$ यः वाञ्छितः गुणनखण्डः अस्ति।

उदाहरणम् 10 $y^2-7y+12$ इत्यस्य गुणनखण्डं जानन्तु।

समाधानम् वयं पश्यामः यत् $12=3\times4$ तथा $3+4=7$ अस्ति।

अत एव
$$y^2-7y+12=y^2-3y-4y+12$$
$$= y(y-3)-4(y-3)=(y-3)(y-4)$$

ध्यानं ददतु यत् अस्मिन् क्रमे वयं a तथा b ज्ञातुं प्रदत्त-व्यञ्जकस्य तोलनं IV सर्वसमिकातः न कृतवन्तः। पर्याप्त-अभ्यासानन्तरं भवतां कृते प्रदत्त-व्यञ्जकानां गुणनखण्डं कर्तुं तस्य सर्वसमिकायाः व्यञ्जकेभ्यः तोलनं करणीयं नास्ति तथा भवन्तः साक्षात् एव गुणनखण्डं कर्तुं शक्नुवन्ति यथा वयम् उपरि कृतवन्तः।

उदाहरणम् 11 $z^2-4z-12$ इत्यस्य गुणनखण्डं प्राप्नुवन्तु।

समाधानम् अत्र $a\,b= -12$ अस्ति। अस्य अर्थः अस्ति यत् a तथा b इत्यनयोः एकः ऋणात्मकः अस्ति। सहैव $a+b=-4$ अस्ति। अस्य अर्थः अस्ति यत् बृहत् सङ्ख्यात्मक-परिणामयुक्तः ऋणात्मकः अस्ति। वयं $a=-4$ तथा $b=3$; संगृह्य प्रयासं कुर्मः परन्तु एतत् कार्यं न करिष्यति यतो हि $a+b=-1$ अस्ति। एतस्मात् अग्रिमं परिकलितं मानं $a=-6$ तथा $b=2$ अस्ति, तदा $a+b=-4$ अस्ति, यत् वयम् इच्छामः।

अतः
$$z^2-4z-12=z^2-6z+2z-12$$
$$= z(z-6)+2(z-6)$$
$$= (z-6)(z+2)$$

उदाहरणम् 12 $3m^2+9m+6$ इत्यस्य गुणनखण्डं प्राप्नुवन्तु।

समाधानम् वयं पश्यामः यत् 3 समेषां पदानां एकः सार्व-गुणनखण्डः अस्ति।

अतः $3m^2+9m+6=3(m^2+3m+2)$

साम्प्रतं $m^2+3m+2=m^2+m+2m+2$ (यतोहि) $2=1\times2$

$= m(m+1)+2(m+1)$

$= (m+1)\ (m+2)$

अतः $3m^2+9m+6=3\ (m+1)(m+2)$

प्रश्नावली 14.2

1. निम्नलिखित-व्यञ्जकानां गुणनखण्डं कुर्वन्तु

   (i) $a^2+8a+16$ (ii) $p^2-10p+25$ (iii) $25m^2+30m+9$

   (iv) $49y^2+84yz+36z^2$ (v) $4x^2-8x+4$

   (vi) $121b^2-88bc+16c^2$

   (vii) $(l+m)^2-4lm$ (सङ्केतः पूर्वं $(l+m)^2$ इति प्रसारयन्तु।)

   (viii) $a^4+2a^2\ b^2+b^4$

2. गुणनखण्डं कुर्वन्तु।

   (i) $4p^2-9q^2$ (ii) $63a^2-112b^2$ (iii) $49x^2-36$

   (iv) $16x^5-144x^3$ (v) $(l+m)^2-(l-m)^2$

   (vi) $9x^2\ y^2-16$ (vii) $(x^2-2xy+y^2)-z^2$

   (viii) $25a^2-4b^2+28bc-49c^2$

3. निम्नलिखित-व्यञ्जकानां गुणनखण्डं कुर्वन्तु।

   (i) ax^2+bx (ii) $7p^2+21q^2$ (iii) $2x^3+2xy^2+2xz^2$

   (iv) $am^2+bm^2+ bn^2+ an^2$ (v) $(lm+1)+m+1$

   (vi) $y(y+z)+9(y+z)$ (vii) $5y^2-20y-8z+2yz$

   (viii) $10ab+4a+5b+2$ (ix) $6xy-4y+6-9x$

4. गुणनखण्डं कुर्वन्तु।

   (i) a^4-b^4 (ii) p^4-81 (iii) $x^4-(y+z)^4$

   (iv) $x^4-(x-z)^4$ (v) $a^4-2a^2\ b^2+b^4$

5. निम्नलिखित-व्यञ्जकानां गुणनखण्डं कुर्वन्तु।

   (i) p^2+6p+8 (ii) $q^2-10q+21$ (iii) $p^2+6p-16$

14.3 बीजीय-व्यञ्जकानां विभाजनम्

वयं शिक्षितवन्तः यत् बीजीय-व्यञ्जकान् कथं योजयामः व्यवकलयामः इति। व्यवकलयेत् च। वयम् एतत् अपि जानीमः यत् द्वयोः व्यञ्जकयोः कथं गुणनं भवेत् परन्तु वयम् एकस्मात् बीजीय-व्यञ्जकात् द्वितीय-बीजीय-व्यञ्जकस्य विभाजनविषये इदानीं यावत् न चर्चितवन्तः अस्मिन् अनुच्छेदे वयम् एतत् एव कर्तुम् इच्छामः।

भवतां स्मरणे स्यात् एव यत् विभाजनं गुणनस्य प्रतिलोम-सङ्क्रिया अस्ति। एवं प्रकारेण $7\times8=56$ इति कारणेन $56 \div 8 = 7$ अथवा $56 \div 7 = 8$ इत्यस्य प्राप्तिः भवति।

एतत् एव वयं बीजीय-व्यञ्जकानां विभाजनार्थं (अथवा भागाकारार्थम्) अपि कर्तुं शक्नुमः । उदाहरणार्थम् -

(i) $$2x \times 3x^2=6x^3$$

अतः $$6x^3 \div 2x=3x^2$$

तथा सहैव $$6x^3 \div 3x^2=2x$$

(ii) $$5x(x+4)= 5x^2+20x$$

अतः $$(5x^2+20x)\div5x=x+4$$

तथा सहैव $$(5x^2+20x)\div(x+4)=5x$$

इदानीं वयं ध्यानपूर्वकेण द्रक्ष्यामः यत् एकं व्यञ्जकम् अन्यस्मात् व्यञ्जकात् कथं विभजितुं शक्नुमः। प्रारम्भार्थं वयम् एकस्याः एकपद्याः अन्यस्याः एकपद्याः विभाजने विचारं करिष्यामः।

14.3.1 एकस्याः एकपद्याः अन्य एकपद्या विभाजनम्

$6x^3\div2x$ इत्यस्मिन् विचारं कुर्वन्तु।

वयं $2x$ तथा $6x^3$ इति अखण्डनीय-गुणनखण्डरूपे लेखितुं शक्नुमः

$$2x=2\times x$$

$$6x^3=2\times3\times x\times x\times x$$

इदानीं वयं $2x$ इति पृथक् करणार्थं $6x^3$ इत्यस्य गुणनखण्डानां समूहं निर्मामः।

$$6x^3=2\times x\times(3\times x\times x)=(2x)\times(3x^2)$$

एवं प्रकारेण $$6x^3\div2x=3x^2$$

सार्व-गुणनखण्डान् निरस्तकरणस्य एकः संक्षिप्त-विधिः सः अस्ति यः वयं संख्यानां विभाजने कुर्मः।

यथा $$77\div7 = \frac{77}{7} = \frac{7\times11}{7} = 11$$

एवमेव $$6x^3\div2x= \frac{6x^3}{2x}$$

$$= \frac{2\times3\times x\times x\times x}{2\times x} =3\times x\times x=3x^2$$

उदाहरणम् 13 निम्नलिखितं विभजन्तु।

(i) $-20x^4\div10x^2$ (ii) $7x^2 y^2 z^2\div14xyz$

समाधानम्

(i) $$-20x^4=-2\times2\times5\times x\times x\times x\times x$$

$$10x^2=2\times5\times x\times x$$

अतः $$(-20x^4)\div10x^2= \frac{-2\times2\times5\times x\times x\times x\times x}{2\times5\times x\times x} =-2\times x\times x=-2x^2$$

(ii) $7x^2 y^2 z^2 \div 14xyz = \dfrac{7\times x\times x\times y\times y\times z\times z}{2\times 7\times x\times y\times z}$

$$= \frac{x\times y\times z}{2} = \frac{1}{2}\,xyz$$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

भागाकारं कुर्वन्तु

(i) $24xy^2 z^3$ इति $6yz^2$ इत्यनेन सह (ii) $63a^2 b^4 c^6$ इति $7a^2 b^2 c^3$ इत्यनेन सह

14.3.2 एकस्य बहुपदस्य एकया एकपद्या सह विभाजनम्

आगच्छन्तु, एकस्य त्रिपदस्य $4y^3+5y^2+6y$ एकपद्या $2y$ इत्यनेन सह विभाजन-विषये विचारं कुर्वन्तु। [अत्र, वयं बहुपदस्य प्रत्येकं पदं गुणनखण्डरूपे लिखामः ।] वयं प्राप्नुमः यत् $2\times y$ इत्यनयोः पदयोः एकः सार्व-गुणनखण्डः अस्ति सहैव वयम् एतं तृतीयपदाय $5y^2$ अपि एकस्मिन् सार्व-गुणनखण्डरूपे परिवर्तयितुं । तदा वयं प्राप्नुमः -

$$4y^3+5y^2+6y=2\times y\times(2\times y\times y)+2\times y\times\left(\frac{5}{2}\times y\right)+2\times y\times 3$$

$$= 2y(2y^2)+2y\left(\frac{5}{2}\,y\right)+2y(3)$$

$$= 2y\left(2y^2+\frac{5}{2}\,y+3\right)$$ (सार्वगुणनखण्डः 2y इति पृथक् प्रदर्शितम् अस्ति)

अतः $(4y^3+5y^2+6y)\div 2y$

$$= \frac{4y^3+5y^2+6y}{2y} = \frac{2y(2y^2+\frac{5}{2}\,y+3)}{2y} = 2y^2+\frac{5}{2}\,y+3$$

वैकल्पिकरूपे वयं त्रिपदस्य प्रत्येकं पदं निरस्तीकरणस्य विधेः प्रयोगं कुर्वन्तः तत् एकपद्या सह विभाजनं कर्तुं शक्नुमः।

$$(4y^3+5y^2+6y)\div 2y = \frac{4y^3+5y^2+6y}{2y}$$

अत्र वयम् अंशे बहुपदस्य प्रत्येकं पदं भाजके एकपद्या विभाजनं कुर्मः।

$$= \frac{4y^3}{2y}+\frac{5y^2}{2y}+\frac{6y}{2y} = 2y^2+\frac{5}{2}\,y+3$$

उदाहरणम् 14 उपर्युक्त-उभयोः विध्योः प्रयोगं कुर्वन्तः $24(x^2 yz+xy^2 z+xyz^2)$ इति $8xyz$ इत्यनेन सह विभाजनं कुर्वन्तु।

समाधानम् $24(x^2yz+xy^2z+xyz^2)$

$= 2\times2\times2\times3\times[(x\times x\times y\times z)+(x\times y\times y\times z)+(x\times y\times z\times z)]$

$= 2\times2\times2\times3\times x\times y\times z\times(x+y+z)$(सार्व-गुणनखण्डः बहिः ग्रहणे सति)

$= 8\times3\times xyz\times(x+y+z)$

अतः $24(x^2yz+xy^2z+xyz^2)\div8xyz$

$$= \frac{(8\times3\times xyz\times(x+y+z)}{8\times xyz} = 3\times(x+y+z) = 3(x+y+z)$$

वैकल्पिकरूपे $24(x^2yz+xy^2z+xyz^2)\div8xyz = \frac{24x^2yz}{8xyz} + \frac{24x^2yz}{8xyz} + \frac{24x^2yz}{8xyz}$

$$= 3x+3y+3z = 3(x+y+z)$$

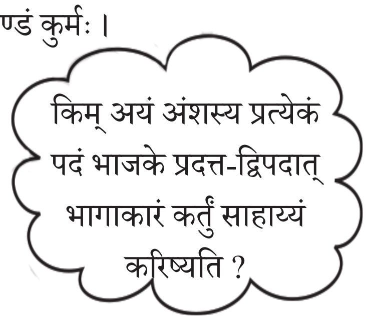
14.4 बहुपदस्य बहुपदेन विभाजनम्

• $(7x^2+14x)\div(x+2)$ इत्यस्मिन् विचारं कुर्वन्तु।

हरेण सह $(7x^2+14x)$ इत्यस्य गुणनखण्डानां परीक्षणार्थं मेलनार्थञ्च पूर्वम् अस्य गुणनखण्डं कुर्मः।

$7x^2+14x=(7\times x\times x)+(2\times7\times x)$

$=7\times x\times(x+2)=7x(x+2)$



अधुना $(7x^2+14x)\div(x+2)= \frac{7x^2+14x}{x+2}$

$= \frac{7x\ (x+2)}{x+2} = 7x$ (x+2 इति गुणनखण्नस्य कर्तनं कुर्मः ।)

उदाहरणम् 15 $44\ (x^4-5x^3-24x^2)$ इति $11x(x-8)$ इत्यनेन सह विभाजनं कुर्वन्तु।

समाधानम् $44\ (x^4-5x^3-24x^2)$ इति गुणनखण्डं कुर्मः ।

$$44(x^4-5x^3-24x^2)=2\times2\times11\times x^2\ (x^2-5x-24)$$

(कोष्ठकात् सार्व-गुणनखण्डः x^2 इति बहिः स्वीकुर्मः ।)

$= 2\times2\times11\times x^2\ (x^2-8x+3x-24)$

$= 2\times2\times11\times x^2\ [x(x-8)+3(x-8)]$

$= 2\times2\times11\times x^2\ (x-8)(x+3)$

अतः $44\ (x^4-5x^3-24x^2)\div11x(x-8)$

$$= \frac{2\times2\times11\times x\times x\times(x+3)\times(x-8)}{11\times x\times(x-8)}$$

$= 2\times2\times x(x+3)=4x(x+3)$

उदाहरणम् 16 $z(5z^2-80)$ इति $5z(z+4)$ इत्यनेन सह विभाजनं कुर्वन्तु।

वयम् अंशे भाजके च सार्वगुणनखण्डं 11, x तथा (x - 8) कर्तयामः।

समाधानम् भाज्यः $=z(5z^2-80)$

$= z[(5 \times z^2)-(5\times16)]$

$= z\times5\times(z^2-16)$

$= 5z\times(z+4)\ (z-4)$[सार्वसमिका $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ इत्यस्य प्रयोगे कृते सति]

एवं प्रकारेण $z(5z^2-80)\div5z(z+4) = \dfrac{5z(z-4)(z+4)}{5z(z+4)} = (z-4)$

प्रश्नावली 14.3

1. निम्नलिखितं विभजन्तु।

(i) $28x^4\div56x$ (ii) $-36y^3\div9y^2$ (iii) $66pq^2r^3\div11qr^2$

(iv) $34x^3y^3z^3\div51xy^2z^3$ (v) $12a^8b^8\div(-6a^6b^4)$

2. प्रदत्त-बहुपदं प्रदत्त-एकपद्या सह विभाजनं कुर्वन्तु।

(i) $(5x^2-6x)\div3x$ (ii) $(3y^8-4y^6+5y^4)\div y^4$

(iii) $8(x^3y^2z^2+x^2y^3z^2+x^2y^2z^3)\div4x^2y^2z^2$

(iv) $(x^3+2x^2+3x)\div2x$ (v) $(p^3q^6-p^6q^3)\div p^3q^3$

3. निम्नलिखितं विभजन्तु।

(i) $(10x-25)\div5$ (ii) $(10x-25)\div(2x-5)$

(iii) $10y(6y+21)\div5(2y+7)$ (iv) $9x^2y^2(3z-24)\div27xy(z-8)$

(v) $96abc(3a-12)(5b-30)\div144(a-4)(b-6)$

4. निर्देशानुसारं विभजतु।

(i) $5(2x+1)(3x+5)\div(2x+1)$ (ii) $26xy(x+5)(y-4)\div13x(y-4)$

(iii) $52pqr(p+q)(q+r)(r+p)\div104pq(q+r)(r+p)$

(iv) $20(y+4)(y^2+5y+3)\div5(y+4)$

(v) $x(x+1)(x+2)(x+3)\div x(x+1)$

5. व्यञ्जकस्य गुणनखण्डं कुर्वन्तु तथा निर्देशानुसारं विभजतु।

(i) $(y^2+7y+10)\div(y+5)$ (ii) $(m^2-14m-32)\div(m+2)$

(iii) $(5p^2-25p+20)\div(p-1)$ (iv) $4yz(z^2+6z-16)\div2y(z+8)$

(v) $5pq(p^2-q^2)\div2p(p+q)$ (vi) $12xy(9x^2-16y^2)\div4xy(3x+4y)$

(vi) $39y^3(50y^2-98)\div26y^2(5y+7)$

14.5 किं भवन्तः त्रुटिं ज्ञातुं शक्नुवन्ति ?

कार्यम् 1 एकस्य समीकरणस्य समाधानार्थं सरिता निम्नलिखित-प्रकारेण समाधानं करोति।

$3x+x+5x=72$

अतः $8x=72$

तथा अत एव $x = \dfrac{72}{8} = 9$

सः कुत्र त्रुटिं कृतवान् ? सम्यक् उत्तरं जानन्तु।

कस्य अपि पदस्य 1 इति गुणाङ्कस्य प्रायः प्रदर्शनं न भवति परन्तु समानपदानां योगसमये वयम् एतं योगे सम्मेलयामः।

कार्यम् 2 अप्पूः एतत् कृतवान्

$$x=-3, 5x=5-3=2$$

किं तस्य प्रक्रिया समीचीना अस्ति ? यदि न तर्हि एतत् सम्यक् कुर्वन्तु ।

एकस्य ऋणात्मकमानस्य स्थापन-समये कोष्ठकानां प्रयोगः भवेत् इति स्मरन्तु ।

कार्यम् 3 नम्रता सलमा च बीजीय-व्यञ्जकानां गुणनं निम्नलिखित-प्रकारेण कृतवत्यौ ।

	नम्रता	**सलमा**
(a)	$3(x-4)=3x-4$	$3(x-4)=3x-12$
(b)	$(2x)^2=2x^2$	$(2x)^2=4x^2$
(c)	$(2a-3)(a+2)=2a^2-6$	$(2a-3)(a+2)$ $=2a^2+a-6$
(d)	$(x+8)^2=x^2+64$	$(x+8)^2$ $= x^2+16x+64$
(e)	$(x-5)^2=x^2-25$	$(x-5)^2=x^2-10x+25$

स्मरन्तु , यदा भवन्तः कोष्ठकान्तर्गतस्य कस्य अपि व्यञ्जकस्य गुणाकारं तस्य बहिः लिखित अचरेण (अथवा चरेण) सह कुर्वन्ति तदा व्यञ्जकस्य प्रत्येकं पदेन तस्य अचरस्य (अथवा चरस्य) गुणनं भवति ।

स्मरन्तु, यदा भवन्तः कस्याः अपि एकपद्याः वर्गं कुर्वन्ति तदा संख्यात्मक-गुणाङ्कस्य प्रत्येकं गुणनखण्डस्य च वर्गः भवति ।

कस्य अपि सूत्रस्य प्रयोगात् पूर्वं एतत् सुनिश्चितं कुर्वन्तु यत् किं तस्य सूत्रस्य प्रयोगः वस्तुतः भवितुम् अर्हति इति ।

किं नम्रता तथा सलमा द्वारा कृतं गुणनं सम्यक् अस्ति ? सकारणम् उत्तरं ददतु ।

कार्यम् 4 जोसफः एकं विभाजनम् अनेन विधिना कृतवान् $\frac{a+5}{5} = a+1$

तस्य मित्रेण शिरीशेन एतत् विभाजनम्

एवं प्रकारेण कृतम् $\frac{a+5}{5} = a$

तस्य अन्यमित्रं सुमनः एतत् एवं कृतवान् $\frac{a+5}{5} = \frac{a}{5} +1$

कः विभाजनं सम्यक् अकरोत् ? कः विभाजनम् असमीचीनरीत्या कृतवान् ? तथा किमर्थम् ?

एकं बहुपदं एकपद्या भागाकार-समये वयम् अंशस्य बहुपदस्य प्रत्येकं पदं भाजकस्य प्रदत्त-एकपद्या सह भागाकारं कुर्मः ।

किञ्चित् मनोरञ्जनम्

अतुलः सदैव पृथक् विधिना विचारयति । सः सुमतिः इति अध्यापिकां पृच्छति " यदि भवती यत् किञ्चित् अपि कथयति तत् सर्वं सत्यम् अस्ति तर्हि अहं $\frac{64}{16} = \frac{4}{1} = 4$ इत्यस्मै समीचीनम् उत्तरं कथं प्राप्नोमि ?" अध्यापिका स्पष्टं करोति " एतत् अत एव अस्ति यत् $64=16\times4$ अस्ति तथा $\frac{64}{16} = \frac{16\times4}{16\times1} = \frac{4}{1}$ अस्ति । वस्तुतः वयं सार्व-गुणनखण्डः 16 इति कर्तयामः 6 इति न , यथा भवन्तः अपि द्रष्टुं शक्नुवन्ति । वस्तुतः 6 64 इत्यस्य अथवा 16 इत्यस्य गुणनखण्डः नास्ति ।" अध्यापिका अग्रे कथयति "सहैव $\frac{664}{166} = \frac{4}{1}, \frac{6664}{1666} = \frac{4}{1}$ इत्यादयः अपि सन्ति " किम् एतत् रोचकं नास्ति ? किं भवन्तः $\frac{64}{16}$ इति प्रकारस्य किञ्चित् अन्य-उदाहरणं ज्ञातुम् अतुलस्य साहाय्यं कर्तुं शक्नुवन्ति ?

प्रश्नावली 14.4

निम्नलिखित-गणितीयकथनेषु त्रुटिं ज्ञात्वा तत् सम्यक् कुर्वन्तु ।

1. $4(x-5)=4x-5$ **2.** $x(3x+2)=3x^2+2$ **3.** $2x+3y=5xy$

4. $x+2x+3x=5x$ **5.** $5y+2y+y-7y=0$ **6.** $3x+2x=5x^2$

7. $(2x)^2+4(2x)+7=2x^2+8x+7$ **8.** $(2x)^2+5x=4x+5x=9x$

9. $(3x+2)^2=3x^2+6x+4$

10. $x=-3$ इति प्रतिस्थापिते सति वयं प्राप्नुमः ।

(a) x^2+5x+4 इत्यस्मात् $(-3)^2+5(-3)+4=9+2+4 = 15$ इति प्राप्यते ।

(b) x^2-5x+4 इत्यस्मात् $(-3)^2-5(-3)+4=9-15+4 = -2$ इति प्राप्यते ।

(c) x^2+5x इत्यस्मात् $(-3)^2+5(-3) = -9-15=-24$ इति प्राप्यते ।

11. $(y-3)^2=y^2-9$ **12.** $(z+5)^2=z^2+25$

13. $(2a+3b)(a-b)=2a^2-3b^2$ **14.** $(a+4)(a+2)=a^2+8$

15. $(a-4)(a-2)=a^2-8$ **16.** $\frac{3x^2}{3x^2} = 0$

17. $\frac{3x^2+1}{3x^2} =1+1=2$ **18.** $\frac{3x}{3x+2} = \frac{1}{2}$ 19. $\frac{3}{4x+3} = \frac{1}{4x}$

20. $\frac{4x+5}{4x} =5$ **21.** $\frac{7x+5}{5} = 7x$

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. यदा वयं कस्य अपि व्यञ्जकस्य गुणनखण्डं कुर्मः तदा वयं तान् गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे लिखामः । एते गुणनखण्डाः, संख्याः, बीजीय-चराः, अथवा बीजीय-व्यञ्जकाः भवितुम् अर्हन्ति ।

2. एकः अखण्डनीयः गुणनखण्डः सः गुणनखण्डः अस्ति यम् इतोऽपि अग्रे गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे वयं व्यक्तीकर्तुं न शक्नुमः ।

3. कस्य अपि व्यञ्जकस्य गुणनखण्डकरणस्य एकः क्रमबद्धः विधिः सार्व-गुणनखण्डविधिः अस्ति । अस्य विधेः चरणत्रयं भवति । (i) व्यञ्जकस्य प्रत्येकं पदम् अखण्डनीय-गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे लिखन्तु । (ii) सार्व-गुणनखण्डान् जानन्तु तथा तान् पृथक् कुर्वन्तु । (iii) प्रत्येकं पदे शेष-गुणनखण्डान् वितरण-नियमानुसारेण संयोजयन्तु ।

4. कदाचित् प्रदत्तस्य एकव्यञ्जकस्य सर्वेषु पदेषु एकः सार्व-गुणनखण्डः न भवति परन्तु एतेषां पदानां केचन समूहाः एतादृशं विस्तारयितुं शक्नुवन्ति यत् प्रत्येकं समूहस्य सर्वेषु पदेषु एकः सार्व-गुणनखण्डः भवति । यदा वयम् एवं कुर्मः तदा सर्वेषु समूहेषु एकः सार्व-गुणनखण्डः प्रकटितः भवति यस्मात् वयं व्यञ्जकस्य गुणनखण्डं प्राप्नुमः । एषः विधिः पुनः समूहन-विधिः इति उच्यते ।

5. पुनः समूहन द्वारा गुणनखण्डने , एतत् सर्वदैव स्मरणे स्यात् यत् व्यञ्जक-पदानां येन केन प्रकारेण समूहनेन गुणनखण्डः न प्राप्यते । अस्माभिः व्यञ्जकः द्रष्टव्यः तथा प्रयासविधिना च पुनः समूहनं प्राप्तव्यम् ।

6. गुणनखण्ड-योग्येषु व्यञ्जकेषु अनेके $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$, a^2-b^2 तथा $x^2+(a+b)x+ab$ इति रूपकाः भवन्ति अथवा एतान् अस्मिन् रूपे परिवर्तितुं शक्यते। एतेषां व्यञ्जकानां गुणनखण्डः नवमे अध्याये प्रदत्त-निम्नलिखित-सर्वसमिकाभ्यः I, II, III तथा IV ज्ञातुं शक्यते।

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$
$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

7. तेषु व्यञ्जकेषु, येषां गुणनखण्डाः $(x+a)(x+b)$ इति प्रकारकाः सन्ति, सर्वदैव स्मर्तव्यं यत् संख्यात्मकात् (अचरात्) पदात् ab इत्यस्य प्राप्तिः भवति। अस्य गुणनखण्डान् a तथा b इति एवं प्रकारेण, यथा अनयोः योगः x इति गुणाङ्कस्य समानं स्यात्। तदा तयोः चिह्ने अपि ध्यानं स्यात्। चिह्नं ध्याने संरक्ष्य यत् अस्य योगः x इति गुणाङ्कस्य समानं स्यात्।

8. वयं जानीमः यत् संख्यानां स्थितौ विभाजनं, गुणनस्य प्रतिलोम-सङ्क्रिया भवति। एतत् बीजीय-व्यञ्जकानां विभाजनाय अपि सत्यम् अस्ति।

9. एकं बहुपदं एकया एकपद्या विभाजन-स्थितौ वयं विभाजनं बहुपदस्य प्रत्येकं पदं तस्याः एकपद्याः भागाकारं कर्तुं शक्नुमः अथवा सार्व-गुणनखण्डविधिना कर्तुं शक्नुमः।

10. एकं बहुपदम् एकेन बहुपदेन विभाजन-स्थितौ वयं भाज्य-बहुपदस्य प्रत्येकं पदं भाजक-बहुपदेन विभाजनं कृत्वा विभाजयितुं न शक्नुमः। अस्य स्थाने वयं प्रत्येकं बहुपदस्य गुणनखण्डं कुर्मः तथा एषु सार्व-गुणनखण्डं कर्तयामः।

11. अस्मिन् अध्याये पठितबीजीय-व्यञ्जक-विभाजनानां स्थितेः वयं भाज्यः = भाजकः × भागफलं प्राप्स्यामः। परन्तु व्यापकरूपे एषः सम्बन्धः निम्नलिखितः अस्ति। भाज्यः = भाजकः × भागफलं + शेषफलम्। एवं प्रकारेण अस्मिन् अध्याये वयं केवलं तादृशानां विभाजनानां चर्चां कृतवन्तः येषु शेषफलं शून्यम् अस्ति।

12. बीजीय-प्रश्नानां समाधान-समये विद्यार्थिनः बहुप्रकारिकां त्रुटिं कुर्वन्ति। भवन्तः तादृशीं त्रुटिं न कुर्वन्तु एतदर्थं प्रयासं कुर्वन्तु।

नोट